演習問題バトルの解答

じょーど (@welldefineD99)

November 9, 2023

0　問題

Problem 0.1. 和が 200 となる自然数の組のうち、積が最大であるものは何か？

Remark 0.2. 0 を含むような組は明らかに最大でないから考慮する必要がない。以下では $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ とする。

1　解答

Definition 1.1.

1. 実数の順序組 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ に対して、$M(a) := \prod_{i=1}^{k} a_i$ と定める。
2. $n \in \mathbb{N}$ に対して、自然数の順序組からなる集合 $\mathrm{Tuple}(n)$ を以下で定める。

$$\mathrm{Tuple}(n) := \left\{ (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathbb{N}^k \middle| k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{k} a_i = n, a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \right\}$$

3. $n \in \mathbb{N}$ に対して、自然数 $\phi(n)$ を以下で定める。

$$\phi(n) := \max \{ M(a) | a \in \mathrm{Tuple}(n) \}$$

4. $M(a) = \phi(n)$ を満たす $a \in \mathrm{Tuple}(n)$ の全体を $\mathrm{Ans}(n)$ と書く。

Remark 1.2. $\mathrm{Tuple}(n)$ は有限集合であるから、集合 $\{M(a) | a \in \mathrm{Tuple}(n)\}$ は最大値を持つ。

Example 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tuple}(4) &= \{\{4\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 1\}\} \\
\phi(4) &= 4 \\
\mathrm{Ans}(4) &= \{\{4\}, \{2, 2\}\}
\end{aligned}$$

Theorem 1.3. $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して次が成り立つ。

$$\phi(n) = \begin{cases} 3^m & (n = 3m, m \in \mathbb{N}) \\ 4 \times 3^{m-1} & (n = 3m+1, m \in \mathbb{N}) \\ 2 \times 3^m & (n = 3m+2, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

Proof. $\mathrm{Ans}(n)$ の元 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ を任意にとる。

もし $a_1 = 1$ であるとすると、$b := (a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k + 1)$ は $\mathrm{Tuple}(n)$ の元となり、しかも $M(b) > M(a)$ が成り立つ。これは $a \in \mathrm{Ans}(n)$ であることに矛盾する。したがって $a_1 \geq 2$ が成り立つ。

もし $a_k \geq 5$ であるとすると、$b := (a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, 2, a_k - 2)$ は (必要ならば要素を並べ替えることで) $\mathrm{Tuple}(n)$ の元となり、しかも $M(b) > M(a)$ が成り立つ。これは $a \in \mathrm{Ans}(n)$ であることに矛盾する。したがって $a_k \leq 4$ が成り立つ。$a_k = 4$ の場合は $(2, 2, a_1, \cdots, a_{k-1})$ も $\mathrm{Ans}(n)$ の元となるから、$a_k \leq 3$ の場合だけを考えれば十分である。

もし $a_3 = 2$(したがって $a_1 = a_2 = 2$) であるとすると、$b := (a_4, a_5, \cdots, a_k, 3, 3)$ は $\mathrm{Tuple}(n)$ の元となり、しかも $M(b) > M(a)$ が成り立つ。これは $a \in \mathrm{Ans}(n)$ であることに矛盾する。したがって $a_1, a_2, \cdots, a_k$ のうち、2 の個数は 2 つ以下である。

以上の条件を満たす $a \in \mathrm{Tuple}(n)$ は一意的であるから主張を得た。 □

Corollary 1.4. $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して次が成り立つ。

$$\mathrm{Ans}(n) = \begin{cases} \{(3, \cdots, 3)\} & (n = 3m, m \in \mathbb{N}) \\ \{(2, 2, 3, \cdots, 3), (3, \cdots, 3, 4)\} & (n = 3m+1, m \in \mathbb{N}) \\ \{(2, 3, \cdots, 3)\} & (n = 3m+2, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

特に $\mathrm{Ans}(200) = \{(2, 3, \cdots, 3)\}$ が成り立つ。

2 考察

「3 をなるべく多く採用し、隙間を 2 で埋める」という方法が最良であるという結論に関して理解を深めるべく、一般化した問題を考える。
Problem 0.1 を次のように書き換える。

Problem 2.1.

1. $k \in \mathbb{N}$ とする。和が 200 となる k 個の自然数の組のうち、積が最大であるものは何か？

2. 上で求めた積が最大となる $k \in \mathbb{N}$ はいくつか？

下線部は自然数から正実数に一般化することができる (実はこちらの方が易しい)。

Problem 2.2.

1. $k \in \mathbb{N}$ とする。和が 200 となる k 個の正実数の組のうち、積が最大であるものは何か？

2. 上で求めた積 $(:= \psi_k)$ が最大となる $k \in \mathbb{N}$ はいくつか？

相加平均と相乗平均の大小関係から、求める組は $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 200/k$、すなわち $\psi_k = (200/k)^k$ であることが導かれる。ここで更に $k \in \mathbb{N}$ という条件を外し、$\psi_x := (200/x)^x$ を最大化する正実数 x を考えると、$x = 200/e$ のときに最大値をとることが分かる (e は自然対数の底)。

すなわち一般化した問題の答えは「e を"$200/e$ 個"並べる場合が最大」となる。Problem 0.1 において 3 を連打することが有効だったのは、3 が e に近いからだと解釈することが出来る。

3 別解

任意の $n \geq 2$ に対して、$\mathrm{Ans}(n)$ の元は 5 以上の要素を含まないことを、n に関する帰納法で示すことが出来る (証明の細部は割愛する)。

Lemma 3.1. $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathrm{Ans}(n)$ に対して、$a_k - a_1 \leq 1$ が成り立つ。

Proof. もし $a_k - a_1 \geq 2$ であるとすると、$b := (a_2, \cdots, a_{k-1}, a_1 + 1, a_k - 1)$ は (必要ならば要素を並べ替えることで) $\mathrm{Tuple}(n)$ の元となり、しかも $M(b) > M(a)$ が成り立つ。これは $a \in \mathrm{Ans}(n)$ であることに矛盾する。 □

Theorem 3.2. $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して次が成り立つ。

(P_n) 任意の $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathrm{Ans}(n)$ に対し、$a_k \leq 4$ が成り立つ。

Remark 3.3. (P_n) から、2,3 以外の要素を含まないような $\mathrm{Ans}(n)$ の元が存在することが従う。実際 $a_1 = 1$ はありえず、$a_l \leq 3$、$a_{l+1} = a_{l+2} = \cdots = a_k = 4$ である場合は $(2, \cdots, 2, a_1, \cdots, a_l)$ も $\mathrm{Ans}(n)$ の元となる。

Proof. $n = 2, 3, 4$ では自明に成り立つから、$n \geq 5$ について示せばよい。任意の $i \in \{2, \cdots, n-1\}$ に対して (P_i) が成り立つことを仮定し、(P_n) の成立を導く。

$a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathrm{Ans}(n)$ を任意にとる。明らかに $(n), (1, n-1) \notin \mathrm{Ans}(n)$ だから $a_k \leq n-2$ が成り立つ。したがって $2 \leq n - a_k < n$ であるから、仮定 (P_{n-a_k}) と Remark 3.3 より、2,3 以外の要素を含まないような $\mathrm{Ans}(n - a_k)$ の元 $b = (b_1, \cdots, b_l)$ が存在する。

ここで $(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}) \in \mathrm{Tuple}(n - a_k)$ であるから $\prod_{j=1}^{k-1} a_j \leq \phi(n - a_k) = \prod_{j=1}^{l} b_j$ が成り立つ。よって $(b_1, \cdots, b_l, a_k) \in \mathrm{Ans}(n)$ であり、Lemma 3.1 より $a_k \leq 4$ が成り立つ。 □